Guía de Estudio
Para el Examen de Admisión
al Posgrado en Matemáticas
Universidad Autónoma Metropolitana Iztapalapa
2016

Casa abierta al tiempo

El examen de Ingreso al Posgrado consiste de cuatro secciones

- Álgebra Lineal
- Cálculo Diferencial e Integral.
- Análisis Real.
- Análisis Complejo.

Cada sección tienen tres problemas. El aspirante debe responder dos preguntas de cada sección.

El contenido de cada sección con una sugerencia de bibliografía se lista a continuación:

Álgebra Lineal

Contenido

1. Sistemas de ecuaciones lineales y matrices.

2. Espacios vectoriales sobre el campo de los reales o complejos. Subespacios vectoriales. Conjunto de generadores, independencia lineal, bases y dimensión. Aplicación a soluciones de sistemas lineales: espacio nulo y columna. Teorema del rango.

3. Transformaciones lineales. Ejemplos en el plano: rotaciones, proyecciones y reflexiones. Kernel e imagen de una transformacion lineal. Transformaciones uno a uno y sobre. Teorema del rango para transformaciones lineales. Espacio vectorial de transformaciones lineales. Composición de transformaciones lineales. La inversa de una transformacion lineal. Isomorfismos. Matriz asociada a una transformación. Matrices de cambio de base. Matrices similares.

4. Determinantes. Definición y Propiedades. Vectores y valores propios. Polinomio característico. Determinación de valores y vectores propios. Diagonalización de matrices. Similaridad. Aplicaciones a procesos estocásticos y a ecuaciones diferenciales ordinarias.

5. Espacios vectoriales con producto interior. Norma. ortogonalidad. Proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt. Matrices ortogonales e unitarias. Proyección ortogonal y complemento ortogonal. Aplicaciones: Mínimos cuadrados. Operadores autoadjuntos o hermitianos. matrices hermitianas o simétricas. Valores propios de matrices simétricas. Teorema espectral.

6. Teorema de Cayley-Hamilton. Vectores propios generalizados. Forma canónica de Jordan. Ejemplos.

Bibliografía

❶ Axler, Sh., *Linear Algebra done right*, Springer-Verlag, 1997.

❷ Carlson, D. et al. *Resources for teaching Linear Algebra.* MAA, serie Notes, 1997

❸ Cullen, Charles G., *Matrices and Linear Transformations*, segunda edicion, Dover, Nueva York, 1990

❹ Friedberg, S., Insel, A., Spencer, L., *Linear Algebra*, Prentice-Hall, 3th ed., 2002.

❺ Grossman, Stanley I, *Algebra lineal*, Grupo Editorial Iberoamérica, 5a. edicion. Mexico, 1996.

❻ K. Hoffman y R. Kunze, *Álgebra Lineal*, Prentice Hall. 1988.

❼ Lang, S. *Linear Algebra*, Springer-Verlag, Undergraduate Texts in Mathematics, 3th ed., 1996.

❽ Meyer Carl. *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra.* SIAM. 2000.

❾ Strang, Gilbert, *Introduction to Linear Algebra*, IV Edición. Wellesley-Cambridge Press. 2009.

Cálculo diferencial e integral en varias variables

Contenido

1. La estructura algebraica de la recta. El orden y el axioma del supremo.

2. Sucesiones en R. Subsucesiones. Convergencia. Sucesiones acotadas, sucesiones monótonas. Sucesiones de Cauchy. Cálculo de límites. Límite superior y límite inferior. Teorema de Bolzano Weierstrass.

3. Series. Convergencia de series. Convergencia absoluta. Criterios de Cauchy y de D' Alembert sobre convergencia absoluta. Criterios de condensación. Criterio de Leibnitz. La función exponencial como límite de una serie numérica.

4. Elementos de la topología de la recta. Definiciones básicas y elementales de conjuntos abiertos y cerrados en R. Conjuntos abiertos, vecindades, interior de un conjunto. Conjuntos cerrados y cerradura de un conjunto. Conjuntos compactos.

5. Funciones continuas en subconjuntos de la recta real. Definición de continuidad mediante sucesiones. Continuidad uniforme. Límites laterales en un punto. Tipos de discontinuidad. Propiedades de funciones continuas sobre un compacto. Propiedades de funciones continuas sobre un intervalo, definición de conexidad. Teorema del valor intermedio para funciones continuas.

6. Diferenciación en la recta. Definición de derivada y sus interpretaciones. Álgebra de funciones derivables. Regla de la cadena. Derivadas de orden superior. Teorema del valor intermedio para derivadas. La derivada de la función exponencial. Teorema del valor medio (Teorema de Rolle) y sus consecuencias. Regla de L' Hospital. Funciones convexas. Teorema de la función inversa.

7. La integral de Riemann. Funciones Riemann-integrables. Espacio de funciones Riemann integrables. Integrabilidad de funciones continuas. Teorema del valor medio del cálculo integral. La integral indefinida. Integración y diferenciación. Teorema fundamental del cÃąlculo. Cambio de variable. Integración por partes. Integrales impropias. Polinomios de Taylor. Teorema de Taylor con residuo representado mediante una integral.

8. Sucesiones y series de funciones reales. Introducción a las series de potencias. Radio de convergencia. Serie de Taylor. Funciones analíticas reales. Convergencia puntual y convergencia uniforme de sucesiones y series de funciones. Estudio de la continuidad, diferenciabilidad e integrabilidad del límite de una sucesión o serie de funciones. La exponencial como una serie de funciones.

9. Aspectos elementales de la topologÃŋa de la mÃľtrica en Rn. Distancia, abiertos, vecindades y cerrados. Convergencia en Rn . Conjuntos compactos (Teorema de Heine-Borel). Conexos. Funciones continuas en varias variables. Continuidad, compacidad y conexidad.

10. La derivada de funciones de varias variables. Álgebra de derivadas. Derivadas parciales. Diferenciabilidad. Funciones de R a Rn. Funciones de Rn a R. Gradiente. Regla de la cadena. Derivada de integrales que dependen de un parámetro. Derivadas de orden superior. Teorema de Schwartz. Extremos de funciones a valores reales. Funciones de clase Ck. Fórmula de Taylor.

11. Teoremas de la función inversa y de la función implÃŋcita. Extremos condicionados y multiplicadores de Lagrange.

12. Integral de Riemann-Stieltjes. Propiedades básicas.

13. Integrales múltiples. Teorema de cambio de variable. Teorema de Fubini.

14. Curvas parametrizadas en el plano y en el espacio. Curvas rectificables. Longitud de una curva, longitud de arco.

15. Superficies parametrizadas en el espacio. Espacio tangente y rectas normales a la superficie. OrientaciÃşn. Área de una superficie.

16. Formas diferenciales en R3. Operaciones con campos vectoriales. Rotacional. Gradiente. Teorema Fundamental del Cálculo en Varias Variables (Teorema de PoincarÃľ-Stokes).

Bibliografía

① Apostol, T., *Calculus Vol. I: One Variable Calculus with an Introduction to Linear Algebra*, Second Edition, Blaisdell Publishing Co., 1967.

② Apostol, T., *Mathematical Analysis: A modern approach to advanced calculus*, Addison-Wesley, 1957.

③ Bartle, R., *The Elements of Real Analysis*, J. Wiley, 1964.

④ Berberian, S., *A First Course in Real Analysis*, Springer, 1993.

⑤ Buck, R. C., Buck, E. F. , *Advanced Calculus*, Waveland Pr Inc; 3 Ed., 2003.

⑥ Courant, R.,John, F., *Introduction to Calculus and Analyis.* Vol. II, Springer-Verlag, 1989

⑦ Fisher, E., *Intermediate Real Analysis*, Springer, 1983.

⑧ Flanigan, F., Kazdan, J.„ *Calculus Two (Linear and Nonlinear Functions)*, Springer, 1990.

⑨ Fleming, W., *CÃąlculo de Varias Variables*, CECSA, 1969.

⑩ Galaz Fontez, F., *IntroducciÃşn al AnÃąlisis MatemÃątico*, Ed. UAM-I, 1992.

❶ Hijab, O., *Introduction to Calculus and Classical Analysis*, Springer, 1997.

❷ Kannan, R., *Advanced analysis : on the real line*, Springer, 1996.

❸ Kaplan, W., *Advanced Calculus*, Third Edition, Addison-Wesley, 1984.

❹ Lang, S., *Calculus of several variables.* Addison Wesley, 1979.

❺ Lima, E., *Introducao ao Analise*, Vol. 2, IMPA, Brasil, 1976.

❻ Loomis, L., Sternberg, S.,*Advanced Calculus*, Revised Edition, Jones and Bartlett Publishers, 1970.

❼ Seeley, R., *CÃąlculo de una y varias variables*, Trillas, 1978.

❽ Spivak, M., *Cálculo en Variedades*, Ed. RevertÃľ, S. A., 1987.

❾ Spivak, M., *Calculus (CÃąlculo Infinitesimal)*, Editorial RevertÃľ S. A., 1999.

❿ Stromberg, K., *An Introduction to Classical Real Analysis*, Wadsworth International, 1981.

Análisis Matemático

Contenido

1. Imágenes y pre-imágenes de conjuntos bajo funciones. Conjuntos y cardinalidad.

2. Espacios métricos y ejemplos. Generalización de los conceptos de cálculo avanzado.

3. Funciones continuas entre espacios métricos. Continuidad uniforme de funciones. Ejemplos.

4. Conceptos topológicos en espacios métricos. Producto de espacios métricos. Separabilidad. Conexidad. Compacidad. Conjuntos totalmente acotados, compacidad secuencial. Equivalencias entre compacidad secuencial y compacidad.

5. Espacios métricos completos. Completación de espacios métricos. Relación con la compacidad. Teorema del punto fijo para contracciones. Ejemplos básicos.

6. Espacios de funciones continuas. Teorema de Stone-Weierstrass. Familias equicontinuas y el teorema de Arzelá-Ascoli. Aplicaciones.

Bibliografía

① T. Apostol, *Analisis Matematico*, Reverte, 1991

② R. G. Bartle, *Introducción al Análisis Matemático*, Limusa 1987

③ R. G. Bartle, D. Shebert, *Introducción al análisis matemático de una variable*, 1984, Limusa

④ Bartle, R. G.,The Elements of integration, Wiley, 1964.

⑤ Brown, A. L., Page, A., Elements of Functional Analysis, Van Nostrand Reinhold, 1971.

⑥ DieudonnÃĬ, J., Foundations of Modern Analysis, Academic Press, 1960.

⑦ Goldberg, R. R., Methods of Real Analysis, Blaisdell Publishing Co. 1964.

⑧ Haaser, N. B., Sullivan, H. A., Real Analysis. Dover, 1991.

⑨ Kolmogorov, A.N., Fomin, S. V., Elementos de la TeorÃŋa de Funciones y del AnÃąlisis Funcional, Editorial Mir, 1984.

⑩ Pugh, C., Real Mathematical Analysis, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer Verlag, 2010.

❶ W. Rudin, *Principios de Análisis Matemático*, Mc Graw Hill 1987

Análisis Complejo

Contenido

1. Funciones C-diferenciables. Funciones C-lineales. Funciones C-diferenciables. Funciones holomorfas. Ejemplos clásicos de funciones C-diferenciables, como son, exponencial, logaritmo, funciones trigonométricas, potencias, raíces, funciones fraccionales lineales.

2. El Teorema de Cauchy. Integración de línea de funciones complejo valuadas. El Teorema de Goursat. El Teorema de Cauchy sobre rectángulos (triángulos o círculos). Consecuencias del Teorema de Cauchy. Desigualdad de Cauchy. El Teorema de Taylor. El Teorema de Morera. El Teorema de Convergencia de funciones C-diferenciables. El Principio de Continuación Analítica. El Principio de la Identidad.

3. Una introducción al estudio de las series de Laurent y el Teorema del Residuo. Clasificación de singularidades aisladas. Series de Laurent y el Teorema de Laurent. Residuos. El Teorema de Cassorati Weierstrass. El Teorema de Picard (sin demostración). El Teorema del Residuo (sin demostración). Aplicaciones del Teorema del Residuo al CÃąlculo de Integrales, como son las transformadas de Fourier y las integrales trigonométricas.

Bibliografía

❶ Ahlfors, L. V., Complex Analysis, Mc.Graw-Hill Book Co., 1966.

❷ Churchill, R. V., Brown. J. W., Variable Compleja y Aplicaciones. 4a. EdiciÃşn. Mc. Graw Hill, 1986.

❸ Conway. J. B., Functions of One Complex Variable I, 2nd Edition, Springer, 1978.

❹ Hile, E., Analytic function theory, Vol. I, II, Chelsea Pub. Co., 1976.

❺ Howell, R. W., Complex Analysis: Mathematica 4.1 Cuadernos Jones and Bartlett Publ., 2002. Internet: http://www.jbpub.com

❻ Howie J., *Complex Analysis*, Springer-Verlag, 2004.

❼ Lang S., *Complex Analysis*, Springer-Verlag, 2008.

❽ Marsden, J., Hoffman, M.J., Basic Complex Analysis, 2nd. Ed., Freeman Co., 1987.

❾ Narasimhan, R., Complex Analysis in One Variable, BirkhÃďuser, 1985.

❿ Nehari, Z., Conformal Mapping, Dover, 2011.

① Needham, T., Visual Complex Analysis. Oxford Univ. Press, 1999.

② Palka B., *An Introduction to Complex Function theory*, Springer - Verlag, 1991.

③ Rudin, W., Real and Complex Analysis, McGraw-Hill, 1966.

④ Uspensky, J. V., Theory of Equations. T. M. H. Edition. McGraw-Hill, 1963.

⑤ Zaldivar, F., Fundamentos de ÃĄlgebra. UAM-I, 2003.

⑥ Zill D. y P. Shanahan, *Complex analysis*, Jones and Bartlett, 2003.

A continuación varios ejemplos de los problemas que se han usado en los exámenes de admisión.

1 Examenes de Ingreso Sección-Algebra lineal

1.1 Examen 13-I

1. Encuentre la solución general del siguiente sistema de ecuaciones.
$$\begin{aligned} x + z + w &= 1 \\ -z - w &= -1 \\ x + 4z - 2w &= 4 \end{aligned}$$
2. Encuentre la matriz con respecto a alguna base de $\Re^3$ de la rotación en $\Re^3$ que manda el punto (1,1,1) al punto (-1,1,-1).
3. Diga si las siguientes proposiciones son verdadera o falsa. Si es verdadera dé la demostración y si es falsa, construya un contraejemplo.
   (a) Toda matriz con valores propios reales es diagonalizable.
   (b) Todo conjunto de vectores ortogonales en $\Re^{3^n}$ es linealmente independiente.

1.2 Examen 13-P

1. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal entre dos espacios vectoriales de dimensión finita. Probar que T es una función inyectiva si y sólo si la imagen bajo T de cada conjunto linealmente independiente de vectores de V es un conjunto linealmente independiente de vectores de W.
2. Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Calcular el polinomio característico $f_A(\lambda)$ de A, sus valores propios y sus multiplicidades tanto algebraica como geométrica, decidir si A es diagonalizable y, en caso afirmativo, dar una forma diagonal D y una matriz P tal que $P^{-1}AP = D$.

3. Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ donde V es un espacio de dimensión finita n. Sea λ_0 un valor propio de T de multiplicidad algebraica k, sea V_{λ_0} el espacio propio de T de valor propio λ_0 y suponer que este espacio es de dimensión r. Probar que $r \leq k$.

4. Sea $(V, <, >)$ un espacio con producto interno y $T \in \mathcal{L}(V)$; probar que si T es autoadjunto y λ es un valor propio de T, entonces λ es real.

1.3 Examen 14-P

1. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal entre los dos espacios vectoriales de dimensión finita. Supongamos adicionalmente que $\dim V = \dim W$. Probar que T es inyectiva si y sólo si T es suprayectiva.

2. Sea V un espacio de dimensión finita y $<, >$ un producto escalar definido en V; sea $T \in \mathcal{L}(V)$ un operador en V tal que T es invertible. Probar que el operador adjunto T^* también es invertible y que $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calcular el polinomio característico $f_A(\lambda)$ de A, sus valores propios y sus multiplicidades tanto algebraica como geométrica, y decidir si A es diagonalizable.

1.4 Examen 14-O

1. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{C}$ y sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Supongamos que $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s$ son los valores propios *distintos* de T y $f_T(\lambda) = a(\lambda - \lambda_1)^{k_1}(\lambda - \lambda_2)^{k_2}...(\lambda - \lambda_k)^{k_s}$ su polinomio caracterí stico. Sea $V_j = Nuc(T - \lambda_j I)$ el espacio propio de T de valor propio λ_j y sea $t_j = \dim_{\mathbb{C}} V_j$. Probar que $t_j \leq k_j$ para toda $j = 1, 2, 3, ..., s$.

2. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Determinar su polinomio característico, sus valores propios, sus espacios propios (una base de ellos) y decidir si es o no es diagonalizable. En caso afirmativo, dar la forma diagonal D y las dos matrices que hacen A similar a D.

3. Sea $(V, <, >)$ un espacio con producto interno y $T \in \mathcal{L}(V)$; probar que si T es autoadjunto y λ es un valor propio de T, entonces λ es real.

1.5 Examen 15-P

1. Demuestre el Teorema de la Dimensión para transformaciones lineales: Si $T : V \longrightarrow W$ es una transformación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita entonces:

$$\dim V = \dim \mathrm{Ker}T + \dim \mathrm{Im}T$$

2. Demuestre que si dos matrices cuadradas reales son similares entonces tienen el mismo polinomio característico.

3. Sea V un espacio vectorial con producto interior. Sea W un subespacio de dimensión finita de V. Use una base ortonormal de W para demostrar que $V = W \oplus W^{\perp}$.

1.6 Examen 15-O

1. Demuestra que si A es una matriz de $m \times n$ con coeficientes reales y B se obtiene de A aplicando un número finito de operaciones elementales sobre renglones o sobre columnas entonces $rango\,(A) = rango\,(B)$

2. Sean K un campo y sean $c_0, c_1, \ldots c_n$ elementos distintos de K. Considérense los *polinomios de Lagrange* asociados a dichos elementos de K, definidos como:

$$f_i\,(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - c_j}{c_i - c_j}$$

para cada $i = 0, \ldots n$. Demuestra que el conjunto $\{f_0, f_1, \ldots f_n\}$ es una base del espacio vectorial $\mathbb{P}_n\,(K)$ de polinomios con coeficientes en K de grado menor o igual que n.

3. Sea V un K-espacio vectorial y sea $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal. Sea $v \in V$ y sea W el subespacio de V generado por el conjunto $\{v, T\,(v)\,, T^2\,(v)\,, \ldots\}$. Demuestra que:

   (a) W es un subespacio T-invariante.

   (b) Si $\dim W = k$ entonces $\left\{v, T\,(v)\,, T^2\,(v)\,, \ldots T^{k-1}\,(v)\right\}$ es una base de W.

2 Examenes de Ingreso Sección-Cálculo de varias variables

2.1 Examen 13-I

1. La temperatura en el punto (x, y, z) en $\mathbb{R}^3$ está dada por

$$T = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Supongamos que se tiene una partícula que viaja sobre la hélice circular $\sigma(t) = 2\ Cos(t)\vec{i} + 2\ Sen(t)\vec{j} + t\vec{k}$. ¿Cómo varía respecto al tiempo la temperatura a lo largo de la hélice? ¿Para $t = 1$ la temperatura decrece o crece?

2. Sea $r = r(x, y) = x^2+y^2$ y sea $s(x, y) = xy$ y sea $g(x, y) = f(r(x, y), s(x, y))$. Use regla de la cadena para encontrar $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}$.

3. Un sólido está limitado por la superficie $z = x^2 - y^2$, el plano xy, y los planos $x = 1$ y $x = 3$. Calcular su volumen por doble integración.

2.2 Examen 13-P

1. Encuentre los puntos en donde el plano tangente a la superficie

$$x^2 - 2y^2 + 2z = 1$$

es paralelo al plano $3x - 2y + z = 2$.

2. Use el teorema de la divergencia para evaluar la siguiente integral

$$\int\int_S (x^3 dydz + x^2 ydzdx + x^2 zdxdy)$$

donde S es la superficie cerrada que consta del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ con $0 \leq z \leq b$ y los discos circulares $x^2 + y^2 < a^2$ en $z = 0$ y $z = b$.

Hint: $sen^2 t = \frac{1-cos(2t)}{2}$ y $cos^2 t = \frac{1+cos(2t)}{2}$.

3. Determine si F es continua y diferenciable.

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0), \\ \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

2.3 Examen 14-P

1. Supóngase que $(a_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de números reales para la cual existe el límite $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$. Demuestre que $\lim_n \frac{a_{n+k}}{a_n} = \rho^k$.

2. Localice y clasifique los puntos estacionarios (críticos) de la función $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ definida mediante $f(x) = \sum_{k=1}^{n} \|x - z_k\|^2$, donde $z_1, z_2, \cdots, z_n$ son n puntos distintos en $\mathbb{R}^m$.

3. Si $\mathbf{r} = (x, y, z)$ ¿Para qué valores positivos de θ es finita la integral

$$\int_B \frac{dxdydz}{\|\mathbf{r}\|^\theta},$$

donde B es la bola unitaria?

2.4 Examen 14-O

1. Suponga que las funciones en este ejercicio son suficientemente diferenciables para realizar los cálculos. Si k es una constante positiva y

$$g(x,t) = \frac{x}{2\sqrt{kt}},\ x \in \mathbb{R},\ t > 0,$$

sea

$$f(x,t) = \int_0^{g(x,t)} e^{-u^2} du.$$

Demuestre que f satisface la ecuación diferencial

$$\frac{\partial f}{\partial t} = k\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ x \in \mathbb{R},\ t > 0.$$

2. Sea $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \neq (0,0)\}$ y f el campo vectorial definido sobre S mediante

$$f(x,y) = \Big(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \Big).$$

Demuestre que f no es un campo gradiente sobre S, i.e., no es el gradiente de un potencial en S.

3. Intercambie el orden de integración para demostrar que si f continua en $[0,a],\ a > 0$ y m es una constante entonces,

$$\int_0^a \Big(\int_0^y e^{m(x-a)} f(x)dx \Big) dy = \int_0^a (a-x)e^{m(x-a)} f(x)dx. \tag{1}$$

2.5 Examen 15-P

1. Encuentre el valor de la constante c tal que en cualquier punto de intersección de las dos esferas

$$\begin{aligned} (x-c)^2 + y^2 + z^2 &= 3 \\ x^2 + (y-1)^2 + z^2 &= 1 \end{aligned} \tag{2}$$

los correspondientes planos tangentes sean perpendiculares entre si.

2. Sea $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ una función diferenciable en un abierto $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$. f es homogénea de orden $p \geq 1$ en $\mathcal{O}$ si para cada $t > 0$ tal que $t\mathbf{x} \in \mathcal{O}$ se tiene que $f(t\mathbf{x}) = t^p f(\mathbf{x})$.

   - Demuestre el Teorema de Euler: $\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} = pf(\mathbf{x})$ para cada $\mathbf{x} \in \mathcal{O}$.
   - En el caso $n = 2$ y $p \geq 2$, suponga que las parciales cruzadas existen y demuestre la siguiente extensión del Teorema de Euler:

$$x^2\frac{\partial f^2}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial f^2}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial f^2}{\partial y^2} = p(p-1)f(\mathbf{x})$$

   para cada $\mathbf{x} \in \mathcal{O}$.

Sugerencia: Defina $g(t) = f(t\mathbf{x})$ y derive.

3. Suponga que una función $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ depende sólo de la distancia r del punto (x, y) al origen, es decir, $f(x, y) = g(r)$ donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y g es una función de una sola variable. Suponga que las derivada s parciales existen.

   (i) Demuestre que para cada punto $(x, y) \neq (0, 0)$, se satisface la relación

   $$\frac{\partial f^2}{\partial x^2} + \frac{\partial f^2}{\partial y^2} = g''(r) + \frac{1}{r} g'(r) \tag{3}$$

   (ii) Ahora suponga que además f es solución de la ecuación de Laplace $\frac{\partial f^2}{\partial x^2} + \frac{\partial f^2}{\partial y^2} = 0$ y demuestre que

   $$f(x, y) = a \log(x^2 + y^2) + b \tag{4}$$

   para $(x, y) \neq (0, 0)$, donde a y b son constantes.

2.6 Examen 15-O

1. El triple producto escalar de tres vectores es el producto $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$.

   (a) Demuestre que si $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$, entonces

   $$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \tag{5}$$

   (b) Demuestre que los vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ son linealmente dependientes si y sólo si $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 0$

2. Considere la función con valores vectoriales $f(t) = (\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}, 1)$, demuestre que el ángulo entre $f(t)$ y $f'(t)$ es constante, i.e., independiente de t.

3. Sea p una función con valores reales y Q una función con valores en $\mathbb{R}^n$, ambas definidas y continuas en un intervalo $[a, b]$. Demuestre que para cada $t_0 \in [a, b]$ y cada vector $y_0 \in \mathbb{R}^n$, existe una y sólo una solución de la ecuación diferencial de primer orden

   $$y'(t) + p(t)y(t) = Q(t) \tag{6}$$

   con condición inicial $y(t_0) = y_0$ y que esta solución está dada por la fórmula:

   $$y(t) = y_0 e^{-q(t)} + e^{-q(t)} \int_{t_0}^{t} Q(s) e^{q(s)} ds \tag{7}$$

   donde $q(t) = \int_{t_0}^{t} p(s) ds$.

3 Examenes de Ingreso Sección-Análisis

3.1 Examen 13-I

1. Demuestra que si $f : (X, d) \to (Y, e)$ es una función entre espacios métricos, entonces las siguiente condiciones son equivalentes:

   (*a*) Si $\{x_n\} \to x \in X$, entonces $\{f(x_n)\} \to f(x) \in Y$,

   (*b*) f es continua.

2. Sean (X, d) un espacio métrico y $S \subseteq X$; se define $d_S : X \to \mathbb{R}$ por $d_S(x) = \inf\{d(x, y) : y \in S\}$. Demuestra que las funciones d_S son continuas para cada $S \subseteq X$ y deduce que si A y B son cerrados ajenos en X, entonces existen abiertos ajenos U y V tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$.

3. Define *sucesión de Cauchy* en un espacio métrico (X, d). Demuestra que si $\{x_n\}_{n\in N}$ y $\{y_n\}_{n\in N}$ son sucesiones de Cauchy en (X, d), entonces $\{d(x_n, y_n)\}_{n\in N}$ es una sucesión convergente en $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

3.2 Examen 13-P

1. Define *convergencia uniforme* de una sucesión de funciones entre espacios métricos; demuestra que si $f_n : (X, d) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ es continua para cada $n \in \mathbb{N}$ y la sucesión $\langle f_n \rangle$ converge, uniformemente a f, entonces f es continua en (X, d).

2. Define *continuidad uniforme* de una función entre espacios métricos; demuestra que una función $f : ([0, 1], |\cdot|) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ es continua si y solo si es uniformemente continua.

3. Define *completez* de un espacio métrico; demuestra que si (X, d) es un espacio métrico y $A \subseteq X$, es tal que $(A, d|A)$ es completo, entonces A es cerrado en (X, d). ¿Es cierto el inverso?

3.3 Examen 14-P

1. *Calcular*
$$\lim_{x\to -0} \frac{\sqrt{1-e^x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}.$$

2. *Sea $y = f(x)$ una función de valores reales definida para todo argumento real x tal que $f^2(x)$ es continua en todos los puntos. ¿Será $f(x)$ continua?*

3. *Encontrar el dominio y el rango de la función $y = \ln|3x^2 + 5x - 2|$.*

3.4 Examen 14-O

1. Sea $f(x)$ una función definida por la fórmula

$$f(x) = \begin{cases} 1/q, & \text{si } x = p/q \quad p, q \in \mathbb{Z},\ q > 0\ p, q \text{ primos relativos;} \\ 0, & \text{en otro caso;} \end{cases}$$

   Probar que $lim_{x \to a} f(x) = 0$ para todo $a \in \mathbb{R}$. ¿Cuáles son los puntos de continuidad de la función $f(x)$?

2. Sea $y = f(x)$ una función de valores reales con $x \in \mathbb{R}$. Pruebe que si $f(x)$ es estrictamente creciente, entonces su inversa $x = g(y)$ es continua en su dominio.

3. Verifique la desigualdad $cos(x) < sen(x)/x$ para cada x con $0 < |x| < \pi/2$.

3.5 Examen 15-P

1. Calcule

$$\lim_{x \to 0} (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$$

2. Halle todos los puntos de continuidad de la función

$$f(x) = \frac{\ln x}{\ln(2 \cos \frac{x}{2})}$$

   Señale esos puntos en el eje real.

3. Sean

$$f(x) = \Big(\int_0^x e^{-t^2}\, dt \Big)^2 \ \text{ y } \ g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1}\, dt.$$

   Pruebe que $f'(x) + g'(x) = 0$ para todo x y deduzca que $f(x) + g(x) = \pi/4$.

3.6 Examen 15-O

1. Sea (E, ρ) un espacio métrico cualquiera. Sea $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en E y $L \in E$. Demuestre que:

   (a) La sucesión converge a L si y sólo si de cualquier subsucesión se puede extraer, a su vez, una subsucesión convegente a L.

   (b) Si la sucesión es de Cauchy, entonces existe una subsucesión $(a_{n_\ell})_{\ell=1}^{\infty}$ tal que

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \rho(a_{n_\ell}, a_{n_{\ell+1}}) < \infty$$

   Sugerencia para b): Aplique la definición de ser sucesión de Cauchy a números ϵ de la forma $\frac{1}{2^k}$, $k = 1, 2, \ldots$

2. Sea $f : [0,1] \to [0,1]$, definida por $f(x) = x$ si x es racional y $f(x) = 1 - x$ si x es irracional. Demuestre que f es, ella misma, su propia función inversa y que su único punto de continuidad es $x = 1/2$.

3. Para $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por,

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1 + x^{2n}}$$

   (a) Calcule el límite puntual cuando $n \to \infty$ y demuestre que la convergencia no puede ser uniforme.

   (b) Sin embargo, pruebe que la convergencia es uniforme en cualquier intervalo cerrado que *no contenga a* 1.

   Sugerencia para b): Demuestre que cada función f_n alcanza su máximo absoluto en $x = 1$ y que f_n crece antes de 1 y decrece después de 1.

4 Examenes de Ingreso Sección-Análisis Complejo

4.1 Examen 13-I

1. Encuentre una función analítica biyectiva que transforma el conjunto $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \operatorname{Re} z > 0\}$ sobre el disco unitario

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

2. Utilizando el teorema de residuos calcula la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{1 + x^4}.$$

3. Localice y clasifique las singularidades de la función

$$f(z) = \frac{z \operatorname{sen} z}{\cos z - 1}.$$

4.2 Examen 13-P

1. Sea $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Demuestra que para todo $a \in \mathbb{D}$ la función $f(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ es analítica en $\mathbb{D}$ y transforma $\overline{\mathbb{D}}$ sobre si mismo.

2. Utilizando el teorema de residuos calcula la integral

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+4)}.$$

3. Localice y clasifique los zeros y las singularidades de la función

$$f(z) = \frac{(z-1)^2 \cos \pi z}{(2z-1) \operatorname{sen} \pi z}.$$

4.3 Examen 14-P

1. Sea $w(z) = (z - a_1)(z - a_2)$ donde los a_j son complejos distintos. Sea C una curva simple cerrada con orientación positiva tal que la región interior a C contiene a a_1 y a_2. Demuestre que
$$\int_C \frac{1}{w(z)}\, dz = 0.$$

2. Sea $z = x + iy$ y sea $f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y)$ una función analítica en todo el plano, donde u y v son funciones de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$. Demuestre que las curvas $u(x, y) = c$ y $v(x, y) = d$, donde c y d son constantes reales, se intersectan en ángulos rectos.

3. Sea z un número complejo con $|z| = 1/2$. Encuentre la suma de todas las raíces de orden cuatro de $-2z$.

4.4 Examen 14-O

1. Sean a, b números complejos distintos de cero tales que $a \neq b$. Sea $w(z) = (z - a)(z - b)$. Encuentre una fórmula explícita para los coefficientes c_n en la serie de Taylor
$$\frac{1}{w(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n.$$

2. Sea $f(z) = \exp(z)$ y sea $A = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : -1 \leq x \leq 0,\ \pi/4 \leq y \leq \pi\}$.
   - (i) Encuentre el conjunto $B = f(A)$. (La imagen de A bajo f).
   - (ii) Encuentre el conjunto $C = f^{-1}(B) = \{u \in \mathbb{C} : f(u) \in B\}$.

3. Sea $f(z) = g(z)/h(z)$ donde h tiene un cero simple en a y $g(a) \neq 0$. Demuestre que el residuo de f en a es igual a $g(a)/h'(a)$.

4.5 Examen 15-P

1. Encuentre el valor de la integral
$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \operatorname{sen}\theta}.$$

2. Sea $p(z)$ un polinomio de grado $n > 1$ con coeficientes en $\mathbb{C}$ y con raíces $a_1, a_2, \ldots, a_n$ en el plano complejo. Sea $q(z) = z^n p(1/z)$. Encuentre todas las raíces de $q(z)$.

3. Sea $exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función exponencial. Sea $f(z) = exp(iz + 1)$. Describa detalladamente la imagen bajo f de la retícula formada por las rectas $\text{Re}(z) = n$, con $n \in \mathbb{Z}$ y las rectas $\text{Im}(z) = k$, con $k \in \mathbb{Z}$.

4.6 Examen 15-O

1. Sea $f : \{z \in \mathbb{C} : z \neq 0\} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = 1/z$. Demuestre que la familia de rectas y círculos en el plano es invariante ante la función f.

2. Sea $A = \{z \in \mathbb{C} : z = 8e^{i\alpha},\ \pi/3 \leq \alpha \leq \pi/2\}$. Encuentre el conjunto $D = \{u \in \mathbb{C} : u^3 \in A\}$.

3. Si el radio de convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ es el real positivo R, encuentre el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} n^k c_n z^n$, donde k es un entero positivo dado.